



USO DE GEOGEBRA PARA LA COMPRESIÓN DE LA DERIVADA IMPLÍCITA EN INGENIERÍA

Marco Antonio Ayala Chauvin
Docente investigador Departamento de Ciencias de la Educación.
Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador.
maayala5@utpl.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0002-0084-6773>

Richard Leonardo Luna Romero
Docente en el Ministerio de Educación, Ecuador.
rlluna@utpl.edu.ec
<https://orcid.org/0009-0008-8832-7898>

Autor para correspondencia: maayala5@utpl.edu.ec

Recibido: 07/10/2024 Aceptado: 06/01/2025 Publicado: 25/01/2025

RESUMEN

Este artículo presenta una intervención educativa en el aula de Análisis Matemático Univariado, centrada en el concepto de derivada implícita y su visualización gráfica mediante GeoGebra, con el propósito de mejorar el rendimiento académico. El objetivo de la intervención fue superar las dificultades que presentaban los estudiantes de Ingeniería Civil para graficar funciones implícitas y comprender la relación entre la curva y su recta tangente en un punto específico, lo que dificultaba la interpretación geométrica de la derivada implícita. La intervención se fundamentó en la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval (2006), que propone que los estudiantes alcanzan una comprensión profunda de un objeto matemático cuando pueden realizar conversiones entre diferentes registros de representaciones, en este caso, entre el registro algebraico al gráfico. Se diseñó un applet en GeoGebra que permitió a los estudiantes visualizar curvas implícitas de la forma $F(x, y) = 0$ y graficar la recta tangente en un punto determinado. La metodología incluyó el uso del applet para facilitar la transición entre la representación algebraica a la gráfica, permitiendo una comprensión más profunda de la derivada implícita. Los resultados mostraron una mejora significativa en la capacidad de los estudiantes para comprender la relación entre la expresión algebraica de una función implícita y su representación gráfica. Se concluye que la integración de herramientas tecnológicas como GeoGebra, combinada con la teoría de registros de representaciones, facilita la apropiación de conceptos abstractos como la derivada implícita, al mejorar la capacidad de conversión entre diferentes formas de representación matemática.

Palabras clave: Derivada implícita, visualización gráfica, GeoGebra, enseñanza matemática, registros semióticos.

USING GEOGEBRA TO UNDERSTANDING OF IMPLICIT DERIVATIVES IN ENGINEERING

ABSTRACT

This article presents an educational intervention in the Univariate Mathematical Analysis classroom, focusing on the concept of implicit differentiation and its graphical visualization using GeoGebra, with the aim of improving academic



performance. The intervention sought to address the difficulties faced by Civil Engineering students in graphing implicit functions and understanding the relationship between a curve and its tangent line at a specific point, which hindered their geometric interpretation of implicit differentiation. The intervention was based on Duval's (2006) theory of semiotic representation registers, which posits that students achieve a deep understanding of a mathematical object when they can transition between different representation registers, in this case, from algebraic to graphical representation. An applet was designed in GeoGebra to allow students to visualize implicit curves of the form $F(x, y) = 0$ and graph the tangent line at a given point. The methodology included the use of the applet to facilitate the transition from algebraic to graphical representation, enabling a deeper understanding of implicit differentiation. The results showed a significant improvement in students' ability to comprehend the relationship between the algebraic expression of an implicit function and its graphical representation. It is concluded that integrating technological tools such as GeoGebra, combined with the theory of representation registers, enhances the understanding of abstract concepts like implicit differentiation by improving students' ability to transition between different forms of mathematical representation.

Keywords: Implicit derivatives, GeoGebra, mathematical visualization, semiotic representations, engineering education.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas ha evolucionado significativamente con el advenimiento de herramientas tecnológicas. En particular, el uso de GeoGebra, un software interactivo que combina geometría, álgebra y cálculo, ha demostrado ser un recurso valioso para mejorar la comprensión de conceptos abstractos y complejos (Andrade et al., 2020). Uno de estos conceptos fundamentales es la derivada implícita, ampliamente aplicada en diversas ramas de la ingeniería.

Los estudiantes a menudo enfrentan dificultades al intentar interpretar geoméricamente las funciones implícitas y su relación con la curva y su tangente. Estas dificultades limitan la comprensión teórica y afectan el desarrollo de habilidades prácticas necesarias en la ingeniería (Puspita et al., 2023). En este contexto, la integración de tecnologías como GeoGebra puede proporcionar un entorno interactivo y dinámico que facilite la conversión entre representaciones algebraicas y gráficas, promoviendo así una comprensión más profunda del objeto matemático. (Arteaga et al., 2019)

La investigación presentada se basa en la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval. Según esta teoría, la comprensión de un concepto matemático depende de la capacidad de los estudiantes para pasar de un registro de representación a otro. En este caso, se enfatiza la conversión del registro algebraico al gráfico (Duval, 2006). A partir de esta teoría, se diseñó una



intervención educativa que emplea un applet de GeoGebra para la visualización de curvas implícitas y la representación gráfica de la tangente en un punto.

El objetivo principal de este estudio es evaluar si el uso de GeoGebra mejora la comprensión de la derivada implícita en estudiantes de Ingeniería Civil, centrándose en la relación entre la representación algebraica y gráfica de funciones implícitas.

METODOLOGÍA

La investigación se llevó a cabo en la Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL), específicamente en las aulas de Análisis Matemático Univariado, durante el período académico de marzo a julio de 2024. Se enfocó en estudiantes de Ingeniería Civil que cursaban dicha asignatura, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico de conveniencia (Hernández y Mendoza, 2018), con un total de 60 participantes. La población estudiada fue elegida debido a sus dificultades previas en la comprensión de la derivada implícita y su visualización gráfica, identificadas en evaluaciones y retroalimentaciones previas.

El enfoque metodológico de la investigación fue de naturaleza cuantitativa, sustentado en el paradigma positivista (Herrera, 2018). El diseño de estudio fue cuasi-experimental con grupo control y grupo experimental (Vizcaíno et al., 2023). El grupo experimental trabajó con la intervención educativa basada en el uso de GeoGebra, mientras que el grupo control utilizó métodos tradicionales de enseñanza.

La variable dependiente fue la comprensión de la derivada implícita, medida a través de evaluaciones pre-test y post-test que incluyeron ejercicios algebraicos y gráficos. La variable independiente fue el uso del applet de GeoGebra diseñado específicamente para visualizar funciones implícitas y graficar la recta tangente en un punto determinado.

La intervención educativa consistió en la implementación de un applet interactivo de GeoGebra que permitía a los estudiantes visualizar curvas implícitas de la forma $F(x, y) = 0$ y la tangente asociada en un punto específico. La teoría de registros de representaciones semióticas de Raymond Duval (1995) fue el marco teórico subyacente, utilizado para evaluar la capacidad de los estudiantes de realizar conversiones entre el registro algebraico y gráfico.

Para la recolección de datos, se emplearon instrumentos cuantitativos, como cuestionarios estandarizados y pruebas diseñadas específicamente para evaluar la comprensión de la derivada implícita antes y después de la intervención (D. V



Sánchez, 2022). Los resultados se analizaron mediante técnicas estadísticas descriptivas e inferenciales (Acosta, 2023), utilizando software especializado para evaluar la significancia de las mejoras observadas (Purwanto *et al.*, 2021). Se aplicó la prueba t de Student para muestras independientes con el objetivo de comparar las medias obtenidas en las pruebas post-test de ambos grupos. (Bautista *et al.*, 2020)

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados derivados de la intervención educativa evidencian una mejora significativa en la comprensión de la derivada implícita entre los estudiantes de Ingeniería Civil. El análisis de los datos recopilados mostró que aquellos que utilizaron el applet de GeoGebra experimentaron un avance considerable en su capacidad para graficar funciones implícitas y determinar la recta tangente en un punto específico de la curva. La metodología implementada abordó eficazmente las dificultades cognitivas asociadas con la conversión entre registros algebraicos y gráficos, contribuyendo a una mejor asimilación del concepto de derivada implícita.

Se trabajó con dos grupos paralelos de la asignatura Análisis Matemático Univariado, con una muestra total de 60 estudiantes seleccionados mediante un muestreo no probabilístico de conveniencia (Hernández, 2021). Los resultados fueron analizados mediante comparaciones antes y después de la intervención, utilizando las calificaciones obtenidas en pruebas específicas diseñadas para medir la comprensión de la derivada implícita.

Tabla 1. Caracterización de la muestra estudiada

Característica	Paralelo 1	Paralelo 2
Número de estudiantes	30	30
Edad promedio	20,8 años	21,2 años
Porcentaje de uso previo de GeoGebra	65%	60%
Promedio inicial en la evaluación de conceptos vinculados a la derivada implícita	6,8/10	6,5/10

La tabla 1 refleja las características de la muestra estudiada. Se observa un número equilibrado de estudiantes entre los dos paralelos, y más del 60% ya tenían experiencia previa con GeoGebra, lo que facilitó la integración del applet en el proceso de intervención educativa.

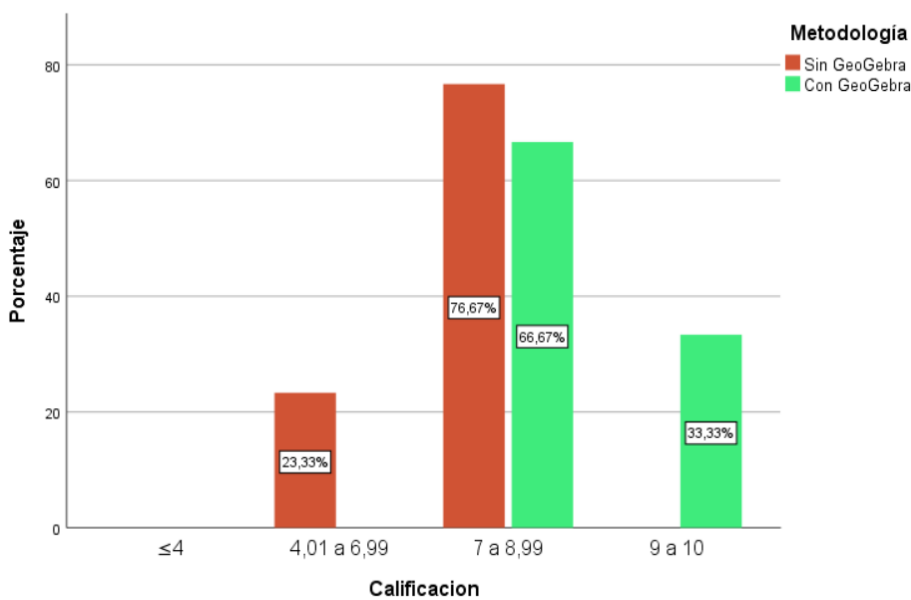


Posteriormente a la intervención, los resultados mostraron un aumento en la capacidad de los estudiantes de ambos paralelos para interpretar funciones implícitas y su derivada, como se refleja en la tabla 2 y la figura 1.

Tabla 2. Comparación de calificaciones antes y después de la intervención

Evaluación	Paralelo 1 (Promedio)	Paralelo 2 (Promedio)
Calificación inicial	6,8/10	6,5/10
Calificación posterior	8,8/10	7,4/10

Figura 1. Porcentajes de calificaciones post-test



La tabla 2 muestra que, tras utilizar el applet de GeoGebra, los estudiantes del paralelo 1 (Grupo Experimental) mejoraron sustancialmente su comprensión de la derivada implícita, con un incremento promedio superior a dos puntos en la evaluación posterior a la intervención. En contraste, en el paralelo 2 (Grupo Control), el promedio del curso solo aumentó en un punto tras recibir una clase tradicional. Este resultado destaca el impacto positivo de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Tabla 3. Pruebas de normalidad resultado post-test

	Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.
Resultados Sin GeoGebra	,984	30	,912
Resultados con GeoGebra	,975	30	,691



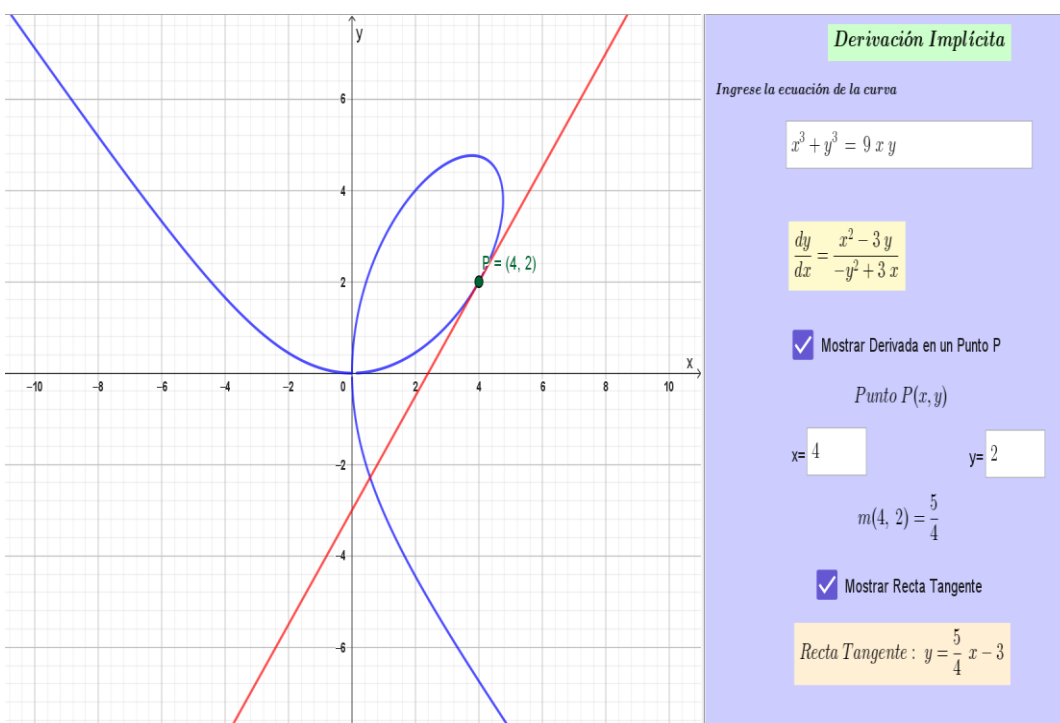
Tabla 4. Prueba t para muestras independientes

	Prueba de Levene de igualdad de varianzas		prueba t para la igualdad de medias			
	F	Sig.	Sig. (bilateral)	95% de intervalo de confianza de la diferencia		
				Inferior	Superior	
Calificación	Se asumen varianzas iguales	4,877	,031	,000	1,67858	1,10009
	No se asumen varianzas iguales			,000	1,67935	1,09932

La información presentada en la tabla 2 es coherente con los resultados mostrados en la figura 1, donde se observa que solo en el grupo experimental los estudiantes obtienen calificaciones superiores a 9 tras la implementación de las intervenciones con GeoGebra. Después de confirmar que los datos cumplían con la prueba de normalidad (con un nivel de significancia de 0,05), como se muestra en la tabla 3, se procedió a realizar la prueba T de Student. (Molina, 2022)

Los resultados, reflejados en la tabla 4, muestran una significancia bilateral de 0.000, lo que indica que los estudiantes del grupo experimental, quienes utilizaron el applet de GeoGebra, mejoraron significativamente su comprensión de la derivada implícita en comparación con el grupo de control. En particular, se evidenció un aumento en la capacidad de interpretar gráficamente las funciones implícitas y su relación con la recta tangente. (Sánchez & Borja, 2022)

Figura 2. Ejemplo de visualización de la curva implícita y su recta tangente en GeoGebra





La figura 2 muestra un ejemplo de cómo el applet de GeoGebra permitió a los estudiantes visualizar la curva implícita de la forma $F(x, y) = 0$, junto con su recta tangente en un punto específico. Esta herramienta resultó clave para fortalecer la interpretación geométrica del concepto de derivada implícita. El applet está disponible en el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/classic/vnsvfvyb>

Evaluación de las Competencias Matemáticas

La investigación evidenció mejoras significativas en las competencias matemáticas de los estudiantes, particularmente en cuanto a:

- Cálculo de derivadas implícitas.
- Visualización Gráfica
- Conversión entre registros algebraicos y gráficos.
- Uso efectivo de tecnología para visualizar conceptos abstractos.

GeoGebra desempeñó un papel esencial en este proceso, facilitando tanto la comprensión como el dominio de la derivada implícita, además de potenciar las habilidades gráficas de los estudiantes.

Tabla 5. Categorización de elementos medibles

Categoría	Descripción	Indicadores
Competencia en derivada implícita	Habilidad para calcular correctamente derivadas implícitas de funciones.	- Número de errores algebraicos cometidos durante la derivación implícita. - Uso correcto de reglas de derivación.
Visualización gráfica	Capacidad para graficar funciones implícitas y sus tangentes utilizando GeoGebra.	- Distingue correctamente los objetos en el applet. - Ingresa un punto y genera la recta tangente.
Conversión de registros	Capacidad para convertir entre registros algebraicos y gráficos.	- Ingresa una función implícita. - Realiza correctamente la conversión de la representación algebraica a la gráfica y viceversa.
Uso de tecnología	Dominio en el uso de GeoGebra para visualizar conceptos abstractos y verificar soluciones.	- Frecuencia de uso del applet. - Eficacia en la verificación gráfica de conceptos.

Para evaluar la percepción de los estudiantes sobre el uso de GeoGebra y su impacto en la comprensión de la derivada implícita, se aplicó una encuesta cuyos resultados son los siguientes:



Tabla 6. Resultados de la encuesta sobre el uso de GeoGebra

Pregunta	Respuesta más frecuente
¿Qué tan fácil te resultó calcular la derivada implícita de una función utilizando métodos algebraicos?	Fácil
¿Te resultó útil el uso de GeoGebra para visualizar la curva y su recta tangente?	Muy útil
¿Crees que la representación gráfica mejoró tu comprensión del concepto de derivada implícita?	Totalmente
¿Pudiste identificar correctamente la relación entre la ecuación algebraica y su gráfica utilizando GeoGebra?	Bastante
¿En qué medida sientes que el uso de diferentes representaciones (gráfica y algebraica) te ayudó a apropiarte del concepto?	Totalmente

Los datos de la encuesta muestran que la mayoría de los estudiantes consideraron útil el uso de GeoGebra para visualizar y comprender mejor el concepto de derivada implícita. Un 65% de los encuestados indicó que pudo identificar correctamente la relación entre la representación gráfica y la ecuación algebraica, y un 75% afirmó que la representación gráfica mejoró considerablemente su comprensión.

Estos resultados confirman que el uso de recursos tecnológicos como GeoGebra es un complemento esencial para el aprendizaje de conceptos matemáticos abstractos en la enseñanza de matemáticas en ingeniería, como la derivada de funciones implícitas. La visualización gráfica mejora la comprensión teórica y la capacidad de interpretación y representación de funciones implícitas. Esto, a su vez, se traduce en un mayor entendimiento por parte de los estudiantes y, por consiguiente, en mejores calificaciones.

CONCLUSIONES

El uso de GeoGebra en la enseñanza de la derivada implícita en estudiantes de Ingeniería Civil ha demostrado ser una herramienta eficaz para facilitar la comprensión de este concepto matemático abstracto. Los resultados de la intervención educativa indican que los estudiantes pudieron realizar conversiones más fluidas entre los registros algebraicos y gráficos, lo que mejoró su capacidad para interpretar la relación entre una curva implícita y su tangente. Esto destaca



la aplicabilidad práctica de GeoGebra como una plataforma interactiva que fortalece la visualización de funciones complejas.

Uno de los aspectos más relevantes del estudio es la integración de la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval con herramientas tecnológicas. Esta combinación ofrece un enfoque innovador para superar las dificultades cognitivas que los estudiantes suelen enfrentar al interpretar la geometría de las funciones implícitas. Los hallazgos coinciden con investigaciones previas que subrayan la importancia de las representaciones múltiples para alcanzar una comprensión matemática profunda.

En comparación con estudios similares, la presente investigación aporta un enfoque metodológico específico centrado en la visualización gráfica mediante GeoGebra. Sin embargo, se observan diferencias en los niveles de eficacia dependiendo del nivel de dominio inicial de los estudiantes con respecto a la herramienta tecnológica, lo que sugiere que futuras investigaciones podrían explorar cómo mejorar la familiarización de los estudiantes con GeoGebra para optimizar aún más los resultados.

De cara a investigaciones futuras, se recomienda estudiar la implementación de esta metodología en diferentes contextos educativos y con otros objetos matemáticos más complejos, como las ecuaciones diferenciales o las funciones paramétricas. Además, sería relevante evaluar cómo el uso de tecnologías complementarias podría potenciar aún más la conversión entre registros de representación.

Finalmente, si bien la metodología empleada en este estudio ha demostrado ser eficaz, la limitación principal radica en la selección no probabilística de conveniencia de los estudiantes, lo que sugiere la necesidad de estudios con muestras más amplias y diversificadas. No obstante, los resultados obtenidos son válidos dentro del contexto de la muestra estudiada y ofrecen una base sólida para la integración de herramientas tecnológicas en la enseñanza de conceptos matemáticos abstractos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, S. F. (2023). Los enfoques de investigación en las Ciencias Sociales. *Revista Latinoamericana Ogmios*, 3(8), 82-95. <https://doi.org/10.53595/rlo.v3.i8.084>

Andrade, C. y de los Ángeles, M. y Jaramillo, L. y Leonardo, M. y Caraguay, M. y Cecibel, G. y Ordóñez, E. y Armando, W. (2020). Las Tics como herramienta metodológica en matemática. *Revista Espacios*, 41(11), 7. <https://revistaespacios.com/a20v41n11/a20v41n11p07.pdf>



- Arteaga, E. y Felipe, M. y Mendieta, J. y Martínez, J. (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Revista Conrado*, 15(70), 102-108. <http://scielo.sld.cu/pdf/rc/v15n70/1990-8644-rc-15-70-102.pdf>
- Bautista, M. L. y Victoria, E. y Vargas, L. B. y Hernández, C. C. (2020). Pruebas estadísticas paramétricas y no paramétricas: su clasificación, objetivos y características. *Educación y Salud Boletín Científico Instituto de Ciencias de La Salud Universidad Autónoma Del Estado de Hidalgo*, 9(17), 78-81. <https://doi.org/10.29057/icsa.v9i17.6293>
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Hernández, O. (2021). Aproximación a los distintos tipos de muestreo no probabilístico que existen. *Revista Cubana de Medicina General Integral*, 37(3). http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-21252021000300002&lng=es&tlng=es
- Hernández, R. y Mendoza, C. P. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGRAW-HILL INTERAMERICANA EDITORES, S.A. de C. V.
- Herrera, J. I. (2018). Las prácticas investigativas contemporáneas. Los retos de sus nuevos planteamientos epistemológicos. *Revista Científica*, 3(7), 6-15. <https://doi.org/10.29394/scientific.issn.2542-2987.2018.3.7.0.6-15>
- Molina, M. (2022). Paso a paso. Prueba de la t de Student para muestras independientes. *Revista Electrónica AnestesiaR*, 14. <https://doi.org/10.30445/rear.v14i8.1060>
- Purwanto, A. y Asbari, M. y Iman Santoso, T. y Sunarsi, D. y Ilham, D. (2021). Education Research Quantitative Analysis for Little Respondents: Comparing of Lisrel, Tetrad, GSCA, Amos, SmartPLS, WarpPLS, and SPSS. *Jurnal Studi Guru Dan Pembelajaran*, 4, 335-351. <https://doi.org/10.30605/jsgp.4.2.2021.1326>
- Puspita, E. y Suryadi, D. y Rosjanuardi, R. (2023). Learning Obstacles of Prospective Mathematics Teachers: a Case Study on the Topic of Implicit Derivatives. *Kreano, Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif*, 14(1), 174-189. <https://doi.org/10.15294/kreano.v14i1.42805>



Sánchez, R. y Borja, A. (2022). Geogebra en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas. Revista Científica Dominio de LAS CIENCIAS, 8(2), 33-52.

Sánchez, D. V. (2022). Técnicas e instrumentos de recolección de datos en investigación. TEPEXI Boletín Científico de La Escuela Superior Tepeji Del Río, 9(17), 38-39. <https://doi.org/10.29057/icea.v9i17.6019>

Vizcaíno, P. I. y Cedeño, R. J. y Maldonado, I. A. (2023). Metodología de la investigación científica: guía práctica. Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 7(4), 9723-9762. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i4.7658